

نکته ۱

با معادله صفحه نیاز به یک نقطه دیگر بر روی صفحه داریم. اگر فرض کنیم روی این صفحه یک خط عمود بر صفحه داریم
در نقطه A، جهت یابی نقطه دیگر از صفحه که عمود بر صفحه باشد خط عمود بر صفحه است و
در این صورت روی صفحه استفاده کنیم.

خط عمود بر صفحه

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$

$\lambda = \frac{1-t}{3}$ $y = \frac{1-t}{3}$ $z = t$

$\vec{v}f = (2, 1, 1)$

$\vec{v}f \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}f(A) = \vec{n} = (2, 1, 1)$

$\vec{v}f \cdot \vec{v} = 0$

$\lambda = 1 \Rightarrow A = (1, 4, -2)$

$P: 2(x-1) + 1(y-4) + 1(z+2) = 0$

$\Rightarrow P: 2x + y + z = 4$

نکته ۲

جهت یابی در فرمول مشتق هس و به این صورت قرار دادن آن، جهت عمود بر صفحه را تعیین می کند.

$\vec{v}f = \left(\frac{f_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{f_y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right)$

$\Rightarrow \vec{v}f = \left(\frac{f_x y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-f_y x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \Rightarrow \vec{v}f(1,1) = \left(\frac{f}{f}, \frac{-f}{f} \right) = (1, -1)$

$D_{\vec{u}} f(A) = \vec{v}f(A) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (1, -1) \cdot \frac{(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} (u_1 - u_2) = 0$



Scanned with
CamScanner

$\Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$ جهت یابی

$$\text{نقطه بحر؟} \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2xy^2 = 0 \\ x - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

ترتیب ۲
(۲)

نقطه بحر را بررسی می‌کنیم. در معادلات فوق می‌توانیم (نقطه مورد بررسی) $(A(0,0))$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} = -2y^2 & f_{xy} = 1-2xy \\ f_{yx} = 1-2xy & f_{yy} = -2xy \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

این نقطه مورد توجه نیست.

ترتیب ۴
(۴) می‌توانیم از معادلات فوق استفاده کنیم تا نقاط بحر را پیدا کنیم. (در صورت لزوم)

$$g: x^2 = y^2 \Rightarrow f(x,y) = f(y^2,y) = f(y) = y^3 + (y+1)^2$$

$$f_y = 0 \Rightarrow 3y^2 + 2(y+1) = 0 \Rightarrow 3y^2 + 2y + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow f(0)=1 \\ y \rightarrow \infty \Rightarrow f(\infty)=\infty \end{cases} \Rightarrow \text{این آماره همگانی است. نقطه بحر را پیدا می‌کنیم و آنرا بررسی می‌کنیم. کمترین مقدار را می‌یابیم.}$$

$$\begin{cases} f: x^2 - x^2 - y \\ g: x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} = \lambda \vec{\nabla} g, \quad g=0$$

ترتیب ۵
(۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} (f_x - \lambda g_x) = \lambda (2x - 2x) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{g} \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \\ -f_x + 2 = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$\text{معادله دوم} \Rightarrow \frac{1}{y} - 2 = -4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{4y} + \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بهمه طرف ها}} \frac{1}{4y} + \frac{1}{2} + y^2 = 1$$

$$\xrightarrow{x^4} 4y^2 - \frac{1}{y} + 2 = 4 \xrightarrow{xy} 4y^3 - 1 = 2y \Rightarrow 4y^3 - 2y - 1 = 0$$

حل باید تعداد ریشه های معادله درجه سوم بدست آمده را آنالیز کنیم. از آنجایی که در معادله $x^2 + y^2 = 1$ محدوده ی برابر بود و تغییر x و y داریم، محتمل است حدی را با در نظر گرفتن $1 > y > -1$ ارائه خواهیم داشت. با توجه به تغییر تعداد ریشه های مشتق و تغییر مقدارهای تابع بدست آمده تنها یک ریشه در $y=0$ گرفته می شود. $y=1$ و $y=-1$ است برای $x^2 + y^2 = 1$ طول نقاط آن $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ است که در نقطه که آنرا $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ داریم (که این) در $y=0$ می شود و تابع حدی را در $y=0$ داریم $x^2 = \frac{1}{2}$ که ریشه های آن $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ است.



Scanned with
CamScanner